Ministère de L'Education Nationale,
de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche **Académie de Lille**

OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES

SESSION DE 2005 (durée : 4 heures)

CLASSES de PREMIERE

Les quatre exercices sont indépendants. Les calculatrices sont autorisées.

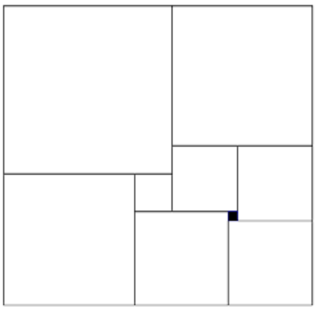

Figure 1

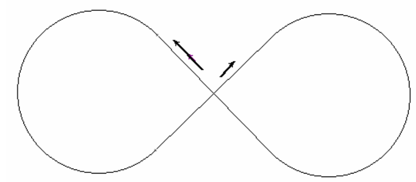

Figure 2

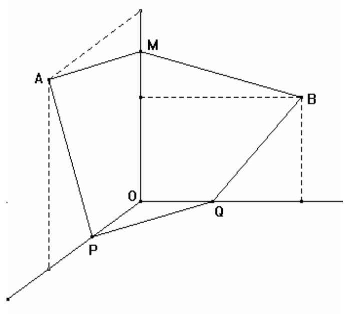

Figure 3

Exercice 1 : *Un pavage.* Figure 1.

Le rectangle ci-dessus est pavé par 9 carrés. Le carré noir a pour côté une unité.
Quelles sont les dimensions du rectangle ?

Exercice 2 : *Et s'il n'en reste qu'un* ?

L'organisateur d'un jeu décide de désigner le gagnant de la manière suivante :
les candidats, numérotés de 1 à 2005 sont disposés en cercle et rangés dans l'ordre de leur numéro et dans le sens des aiguilles d'une montre. Le jeu commence par le joueur n°1 qui dit « ***Gagné*** », puis le suivant dit « ***Perdu*** », et ainsi de suite en alternant les deux réponses. Tout candidat qui dit ***« Perdu »*** est éliminé et quitte le cercle. Le jeu se poursuit jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'un seul joueur qui est le gagnant.
Quel est le numéro de ce gagnant ?

Exercice 3 : *Le lièvre et la tortue.* Figure 2.

La piste du champiodrome a la forme suivante : deux arcs formant les trois quarts d'un cercle , raccordés par les deux diagonales d'un carré, ces deux diagonales se coupant en un carrefour.
Au même instant, une tortue et un lièvre partent du carrefour, empruntant deux diagonales différentes menant à deux arcs de cercle différents (sur le dessin, une flèche pour la tortue, deux flèches pour le lièvre).
Les deux animaux courent à vitesse constante, et la tortue met 363 secondes pour parcourir la distance parcourue par le lièvre en 1 seconde.
Après 2005 rencontres (dépassements sur la piste ou croisements au carrefour) hormis le départ, le lièvre abandonne.
Combien de fois avait-il croisé la tortue au carrefour ?

Exercice 4 : *De A à B par le plus court chemin !* Figure 3.

L'espace euclidien est rapporté à un repère orthonormal d'origine O. Soit A le point de coordonnées (x_A ; 0 ; z_A) et B le point de coordonnées (0 ; y_B ; z_B) ; les nombres x_A , y_B,, z_A et z_B sont des réels fixés strictement positifs.
Soient les points M de coordonnées (0 ; 0 ; m), P de coordonnées (p ; 0 ; 0) et Q de coordonnées (0 ; q ; 0).

1. Déterminer, en fonction de x_A , y_B,, z_A et z_B , le nombre m pour que AM + MB soit minimal.
2. Déterminer , en fonction de x_A , y_B,, z_A et z_B , les nombres p et q pour que AP + PQ + QB soit minimal.

Dans quels cas ce minimum est-il égal à AO + OB ?